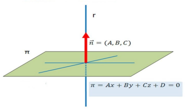
2,5

Consideremos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + z = 14 \end{cases}$

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r. 1.5 ptos

b. Consideremos $P\,(1,4,2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto



Para resolver este ejercicio partiremos de calcular el vector director de la recta r, que obviamente será perpendicular al plano que nos piden. Eso significa calcular el producto vectorial de los vectores de los planos que aparecen en la ecuación implícita de la recta, que si completamos sus ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 1x + 1y + 0z = 5 \rightarrow (1,1,0) \\ 0x + 3y + 1z = 14 \rightarrow (0,3,1) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1i - 1j + 3k$$

El vector obtenido es vector director de la recta, pero como la recta es perpendicular al plano nos sirve como vector normal al plano y por tanto podemos plantear la ecuación general del plano dado que tenemos un punto que pertenece al plano:

$$1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow \;\Rightarrow\; \Rightarrow x - y + 3z - 2 = 0$$

Resuelto el apartado a. para el siguiente apartaado tenemos que definir el vector de A a P, y una vez calculado procedemos a calcular el ángulo formado entre dicho vector y el vector director de la recta r haciendo uso del producto escalar:

$$\left. \begin{array}{r} el\ vector\ \overrightarrow{AP} = (1,4,2) - (1,2,1) = (0,2,1) \\ \\ el\ vector\ de\ la\ recta\ r\ es\ 1i - 1j + 3k \end{array} \right\} \rightarrow \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1$$

$$pero\ es\ que,\ por\ otra\ parte: \left\{ \begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5} \\ |\vec{v}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} \end{array} \right\} \rightarrow \rightarrow 1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot \cos\alpha$$

De donde puedo despejar directamente el ángulo que me piden:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = 82°15'2{,}28''$$

<table>
<tr>
<td>2</td>
<td>

Dada la recta $r:\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$

Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Si el plano que buscamos contiene a la recta podemos considerar que el punto (0,2,2) pertenece a dicho plano, al igual que a su vector… y si es perpendicular al otro plano su vector normal también es paralelo al plano que buscamos….
Por tanto, con dos vectores y un punto es fácil determinar la ecuación del plano mediante el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Si desarrollamos el determinante tendremos la ecuación general del plano:

$$8\cdot(x-0)+11\cdot(y-2)+5\cdot(z-2)=0\to\to\to 8x+11y+5z-32=0$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>1,5</td>
<td>

Determinar el **ángulo** que forman la **recta** $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$ y el **plano** $\pi \equiv x+y-1=0$.

Se trata de obtener el vector director de la recta y el normal al plano. Una vez obtenido utilizamos el producto escalar para determinar el ángulo, pero considerando que el ángulo obtenido por este precedimiento es el complementario al ángulo que pretendemos obtener. Ahora bien considerando que obtenemos un ángulo de 45º, lógicamente su complementario también es de 45º.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,2)\\ \vec{v}=(1,1,0)\end{array}\right\} u\cdot v = 2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0=3 \\ \qquad\qquad |\vec{u}|=\sqrt{9}=3 \\ \qquad\qquad |\vec{v}|=\sqrt{2} \end{array}\right\}\to\to\to \alpha = \arccos\frac{3}{3\sqrt{2}} = 45°$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>1,5</td>
<td>

¿Cuál es el punto de intersección entre la recta y el plano del ejercicio anterior?
Se trata de pasar a paramétricas la ecuación de la recta y sustituir las coordenadas del punto genérico en la ec. Del plano… de donde podemos despejar el valor del parámetro a sustituir en las paramétricas de la recta y obtener de esa forma el punto:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}\to\to x+y-1=0\to\to\to 1+2\lambda-1+\lambda-1=0\to\to\to\lambda=\frac{1}{3}$$

por tanto el punto de intersección tiene por coordenadas: $\left(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

</td>
</tr>
</table>

2,5	Dados los punto A(1,2,1), B(0,1,1) y C(3,2,2) : - averiguar si están alineados (0,75 ptos) - realizar el producto vectorial de AB por CB (0,75 ptos) - Determinar la ecuación del plano que contiene al punto A y contiene a los vectores AB y CB (1 pto) Los tres puntos estarán alineados si se encuentran en la misma recta. Por tanto, nos vale con definir una recta entre dos puntos y comprobar si el tercero cumple las condiciones de la ecuación. Vamos a comprobarlo definiendo primero la recta entre los puuntos A y B, construyendo un vector y tomando uno de los puntos: $\left.\begin{matrix} A(1,2,1) \\ B(0,1,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow AB=(-1,-1,0) \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ De donde es evidente que la coordenada z del punto C no cumple con la ecuación, por tanto: los puntos no están alineados. Obviamente también hubieramos podido comprobarlo con la ecuación continua de la recta. Para es siguente apartado simplemente calculamos CB=(0,1,1)-(3,2,2)=(-3,-1,-1) y calculamos el producto vectorial mediante el determinante: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1i - 1j - 2k$ Para el último apartado debemos tener en cuenta que o bien planteamos el determinante con elunto A los dos vectores, o bien como ya tenemos el producto vectorial de los vectores a considerar nos basta con tomar el resultado como vector normal y plantear la ecuación general del plano, es decir: 1(x-1)-1(y-2)-2(z-1)=0 o lo que es lo mismo x-y-2z+3=0

- En el transcurso del control, el profesor no contestará preguntas
- Queda prohibido el uso de dispositivos móviles
- Se guardará silencio, incluso si se ha acabado el control
- El control debe ser legible, limpio y ordenado
- Deben aparecer los procesos de cálculo seguidos y razonar las respuestas
- Se indicará el nombre en cada hoja que se entregue

Se evalúa el criterio 3

7. Utilizar el lenguaje vectorial para expresar situaciones y problemas geométricos y físicos en el espacio y utilizar las propiedades y las operaciones con vectores para resolverlos e interpretar las soluciones; además utilizar las ecuaciones de la recta y el plano para resolver problemas métricos y estudiar posiciones relativas, ayudándose para todo ello de programas informáticos.