

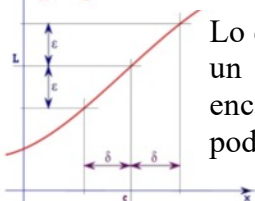
Resumen de límites

Indeterminaciones

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{\infty}$	$\frac{\infty}{0}$
1^∞	∞^0
0^0	

La definición formal

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Lo que significa que por muy pequeño que escojamos un cierto intervalo de **centro en c**, siempre encontraremos un **intervalo de centro en L** que podamos **relacionar con el entorno de c**

Aplicando la definición

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5 &\rightarrow |x-2| < \delta \rightarrow |3x-1-5| < \varepsilon \\ |3x-6| < \varepsilon &\rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \\ |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} &\rightarrow \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}} \end{aligned}$$

cociente de polinomios $x \rightarrow \infty$

Bastará con observar los grados y los **coeficientes** de los términos de **mayor grado**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 7x - 2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 7x - 2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x - 2}{2x^3 - x + 1} = 0$$

cociente de polinomios $x \rightarrow a$

Si conduce a $0/0$, procedemos a **descomponer factorialmente** para simplificar, o aplicamos la regla de **L'hopital**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \xrightarrow{\text{aplicando L'hopital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

Más L'hopital

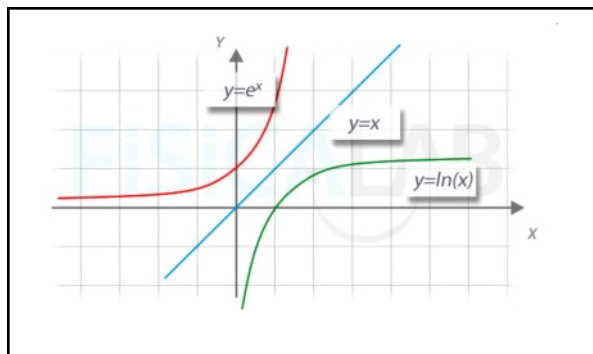
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{\text{aplicando L'hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \xrightarrow{\text{aplicando L'hopital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

Con radicales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} &\xrightarrow{\text{aplicando conjugado}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Orden de las funciones en el infinito



Fórmula para el límite con e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^b$$

$$b = \lim_{x \rightarrow a} (\text{base} - 1) \cdot (\text{exponente})$$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \xrightarrow{\text{Mi método}}$$

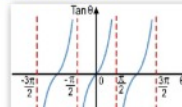
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2 \end{aligned}$$

Continuidad

Condiciones de continuidad

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{array} \right.$$

- La función **polinómica** es continua en todo $\mathbb{R}$
- La función **racional** es continua salvo en aquellos valores que anulan el denominador $\frac{f(x)}{g(x)}$
- Las funciones **exponenciales** siempre son continuas, a condición de que la base sea positiva $f(x)=a^x$
- La función **logaritmo** es continua en todos los reales positivos
- La función **irracional** de índice par es continua en aquellos valores que sean mayores o iguales a cero $f(x)=\sqrt[n]{x}$
- Las funciones **trigonométricas** son continuas, salvo la función tangente



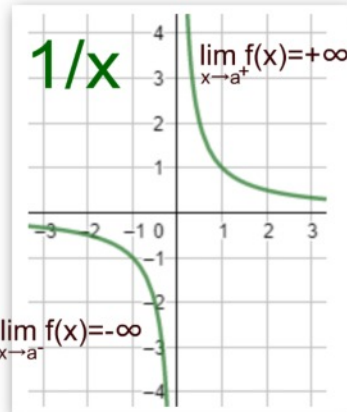
Intuitivamente, el límite de una función $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$ es el valor al que $f(x)$ se aproxima cuando x se aproxima a a .

pero en algunas funciones $f(x)$ toman valores distintos si nos aproximamos por la izquierda o por la derecha al punto

si no aproximamos a cero por la izquierda los valores se disparan hacia menos infinito

x	y
-10	-0,1
-1	-1
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
...	...
0,001	1000
0,01	100
0,1	10
1	1
10	0,1

Si nos aproximamos a cero desde la derecha los valores se disparan hacia más infinito



Evitables	no está definida la función en $x=a$, pero existe el límite en $x=a$		$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
De salto	Los límites laterales son distintos	finito	$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$
		infinito	$f(x)=1/x$
Esencial	No existe uno de los límite laterales		$f(x)=x^2 \text{ si } x \leq 2$

Concepto de derivada

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Una función es derivable en un punto cuando es continua en dicho punto y cuando las derivadas a izquierda y derecha coinciden

TABLA DE DERIVADAS

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA	FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$Y = k$	$Y' = 0$	$Y = x$	$Y' = 1$
$Y = u + v + w$	$Y' = u' + v' + w'$	$Y = u \cdot v$	$Y' = u \cdot v' + u' \cdot v$
$Y = \frac{u}{v}$	$Y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	$Y = \log_b u$	$Y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_b e$
$Y = u^n$	$Y' = u' \cdot n \cdot u^{n-1}$	$Y = L_n u$	$Y' = \frac{u'}{u}$
$Y = k^u$	$Y' = u' \cdot k^u \cdot L_n k$	$Y = e^u$	$Y' = u' \cdot e^u$
$Y = \sin u$	$Y' = u' \cdot \cos u$	$Y = \operatorname{tg} u$	$Y' = u' \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 u)$
$Y = \cos u$	$Y' = -u' \cdot \sin u$	$Y = \operatorname{artg} u$	$Y' = \frac{u'}{1 + u^2}$
$Y = u^v$	$Y' = v' \cdot u^v \cdot L_n u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$		

u,v,w son funciones de x ; u' es la derivada de u respecto de x ; k es una cte ; L_n es Log base e ; n y b son números racionales ; |u| es valor absoluto de u.

Desarrollo de Taylor

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$