

Geometría Espacial

Ecuaciones de la recta

Ecuación	Punto y vector director	Expresión
Ecuación vectorial	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vector director $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$	$\vec{r} = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$
Ecuación paramétrica	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vector director $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$	$\vec{r} = \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$
Ecuación continua	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vector director $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$	$\vec{r} = \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$
Ecuación implícita	Vector director $\vec{u}$: $\vec{u} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$	$\vec{r} = \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Posiciones relativas de dos rectas en forma implícita

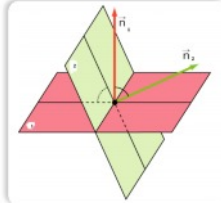
Posición relativa	Ecuaciones de las rectas	Rango (M)	Rango (M')
Se cruzan Sistema incompatible	$\vec{r}: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	3	4
Se cortan Sistema compatible determinado	$\vec{s}: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$	3	3
Paralelas Sistema incompatible	$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$	2	3
Coincidentes Sistema compatible indeterminado		2	2

3 vectores son coplanarios si el determinante formado con ellos es nulo

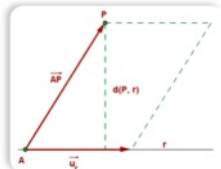
El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo que determinan ambos vectores

Ecuaciones del plano

Ecuación	Punto y vectores	Expresión
Ecuación vectorial	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$	$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
Ecuación paramétrica	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
Ecuación general	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ Vector normal $\vec{n}(A, B, C)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$
Ecuación canónica o segmentaria	Tres puntos: $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$
	Puntos de corte del plano con los ejes $A(a, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$ $C(0, 0, c)$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



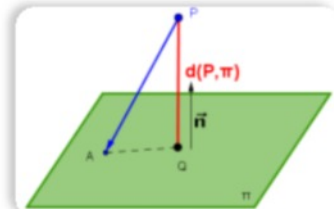
El ángulo entre dos planos viene dado por el ángulo que forman sus vectores normales



$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$$

Posiciones relativas de dos planos

Posición relativa	Ecuaciones de los planos	Rango (M)	Rango (M')	Proporcionalidad
Planos secantes Sistema compatible determinado	$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	2	2	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
Planos paralelos Sistema incompatible	$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$	1	2	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
Planos coincidentes Sistema compatible indeterminado	$M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$	1	1	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$



$$d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Si dos planos son paralelos la distancia entre ellos viene dada por la distancia de un punto de uno de los planos al otro plano (aplicar la fórmula de distancia de un punto a un plano)

- Es conveniente repasar las propiedades del producto escalar y del producto vectorial
- Visitar el canal de youtube y la web <http://mcas.es/2Bach>
- Algunas imágenes de este resumen han sido tomadas de <http://calculo.cc/index.html>